論理演算の諸法則

①べき等則

$$A+A=A \qquad A\cdot A=A \qquad A\oplus A=0$$

②基本則

$$A+\overline{A}=1 \qquad A\cdot\overline{A}=0 \qquad A\oplus\overline{A}=1$$

$$A+1=1 \qquad A\cdot 1=A$$

$$A+0=0 \qquad A\cdot 0=0$$

③交換則

$$A+B=B+A \qquad A\cdot B=B\cdot A$$

④分配則

$$A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$$

⑤結合則

$$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$$

➔ $(A+B)\cdot(A+C)=A\cdot A+A\cdot C+B\cdot A+B\cdot C$ 🡐分配則

$=A+A\cdot C+A\cdot B+B\cdot C$ 🡐べき等則、交換則

$=A+A\cdot(B+C)+B\cdot C$ 🡐分配則、交換則

$=A\cdot(1+(B+C))+B\cdot C$ 🡐分配則、基本則

$=A\cdot 1+B\cdot C$ 🡐基本則

$=A+B\cdot C$ 🡐基本則

$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

⑥吸収則

$$A+(A\cdot B)=A \qquad A\cdot(A+B)=A$$

⑦復元則

$$\overline{\overline{A}}=A$$

⑧ド・モルガンの法則

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B} \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

・ $A+\left(A\cdot B\right)=A$ の証明

a)論理演算書法則による方法

$$A+(A\cdot B)=A\cdot(1+B)$$ 🡐分配則

$$=A\cdot 1$$ 🡐基本則

$$=A$$ 🡐基本則

b)真理値表による方法

A 、 B 、 $A\cdot B$ および、 $A+(A\cdot B)$ に関する真理値表を書くと A と $A+(A\cdot B)$ は、同じことが分かる。

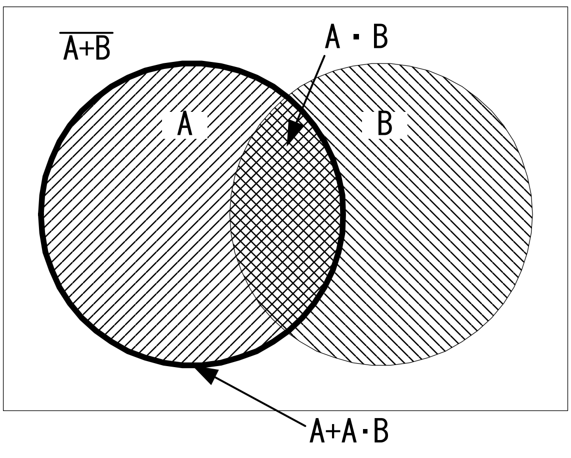
A 、 B 、 $A\cdot B$ および、 $A+(A\cdot B)$ に関する真理値表

A	B	A･B	A+(A･B)
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

A と $A+\left(A\cdot B\right)$ は、同じ

b)ベン図による方法

$A+(A\cdot B)$ に関するベン図を書くと下図のようになり、 A と $A+(A\cdot B)$ は、同じことが分かる。



$A+\left(A\cdot B\right)=A$ のベン図

・$A \cdot (A+B) = A$ の証明

a)論理演算書法則による方法

$$
\begin{aligned}
A \cdot (A+B) &= A \cdot A + A \cdot B && \leftarrow \text{分配則} \\
&= A + A \cdot B && \leftarrow \text{べき等則} \\
&= A \cdot (1+B) && \leftarrow \text{分配則} \\
&= A \cdot 1 && \leftarrow \text{基本則} \\
&= A && \leftarrow \text{基本則}
\end{aligned}
$$

b)真理値表による方法

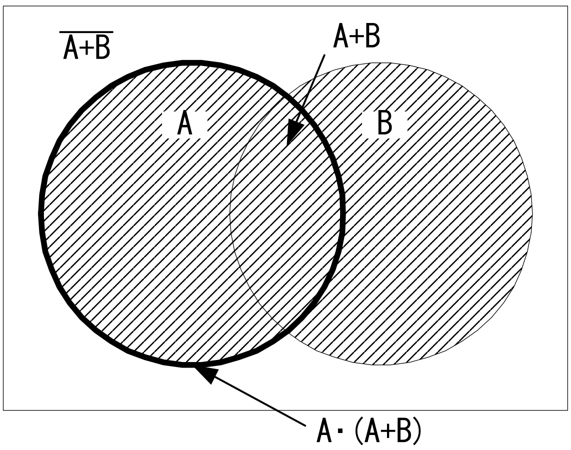
A 、B 、$A+B$ および、$A \cdot (A+B)$ に関する真理値表を書くと A と $A \cdot (A+B)$ は、同じことが分かる。

A 、B 、$A+B$ および、$A \cdot (A+B)$ に関する真理値表

A	B	A+B	A・(A+B)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

A と $A \cdot (A+B)$ は、同じ

b)ベン図による方法



$A \cdot (A+B) = A$ のベン図

ド・モルガンの法則の証明

・$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ の証明

a)真理値表による方法

A、B、$A+B$、$\overline{A+B}$、$\overline{A}$、$\overline{B}$ および、$\overline{A}\cdot\overline{B}$ に関する真理値表を書くと $\overline{A+B}$ と $\overline{A}\cdot\overline{B}$ は、正しいことが分かる。

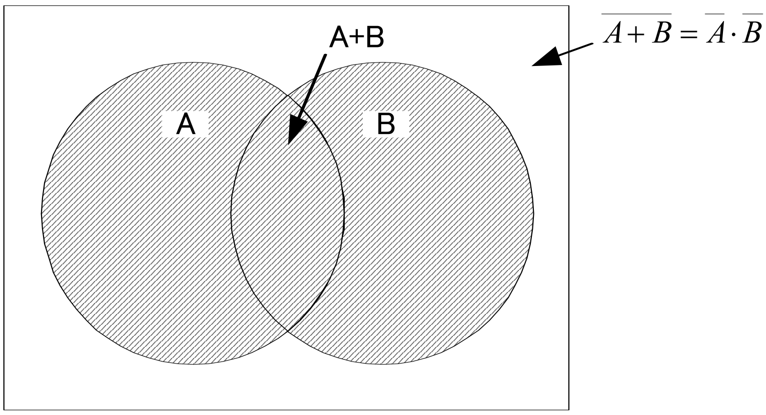
$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ を証明するための真理値表

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

同じ値になる

b)ベン図による方法

$A+B$ を示すベン図を書くと下図の斜線部となり、$\overline{A+B}$ は、斜線部以外の部分となるまた、$\overline{A}\cdot\overline{B}$ も下図から斜線以外の部分なので、$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ は、正しいことが分かる。



$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ を証明するためのベン図

・$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ の証明

a)真理値表による方法

A 、B 、$A+B$ 、$\overline{A \cdot B}$ 、$\overline{A}$ 、$\overline{B}$ および、$\overline{A}+\overline{B}$ に関する真理値表を書くと $\overline{A \cdot B}$ と $\overline{A} \cdot \overline{B}$ は、正しいことが分かる。

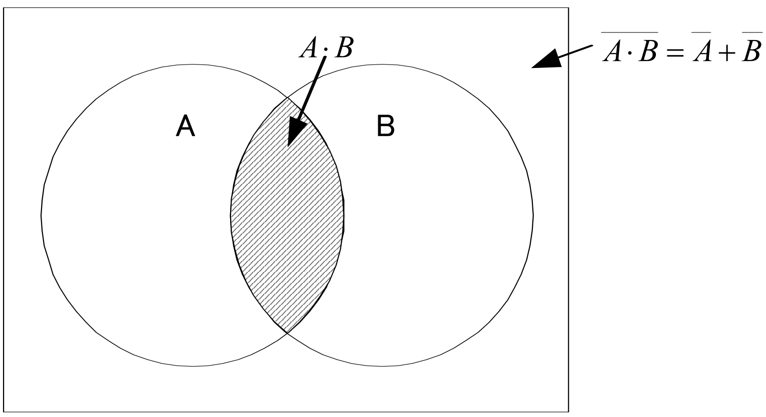
$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ を証明するための真理値表

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

同じ値となる

b)ベン図による方法

$A \cdot B$ を示すベン図を書くと下図の斜線部となり、$\overline{A \cdot B}$ は、斜線部以外の部分となる。また、$\overline{A}+\overline{B}$ も下図から斜線以外の部分なので、$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ は、正しいことが分かる。



$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ を証明するためのベン図

演算の順序

カッコ ➔ 否定 ➔ 論理積 ➔ 論理和　の順に計算する。

論理式の簡単化

例) $A \cdot B + A \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = A \cdot \left(B + C + \overline{B} \cdot \overline{C}\right)$ ←分配則

$= A \cdot \left(B + \left(C + \overline{B}\right) \cdot \left(C + \overline{C}\right)\right)$ ← 吸収則、結合則

$= A \cdot \left(B + \left(C + \overline{B}\right) \cdot 1\right)$ ←基本則

$= A \cdot \left(B + \overline{B} + C\right)$ ←基本則、交換則

$= A \cdot \left(1 + C\right)$ ←基本則

$= A \cdot 1 = A$ ←基本則

この方法は、全ての法則を知っていないと出来ない➔大変*!!*

カルノー図を利用することで容易に論理式を簡単化することができる。